

I らせんのイメージ

1



マーチンガードナー著 ブルーバックス

第4章に「らせんのイメージ」という章があり、三種類のらせんについて書かれている。

- ① 円筒状のポストにつながれたやぎの動き。(円の伸開線)
- ② 動いている回転木馬の上で、技師が床の半径に沿って一定の速さで動く。(アルキメデスが最初に研究したのでアルキメデスのらせんと呼ばれます)
- ③ 三匹の犬が、正三角形のかどかどにいる。それぞれの犬に命じて、その右にいる犬のところに真っ直ぐ走らせる。犬たちは動きながら、それにつれてお互いに向きを変え、三角形の中心で三匹が出会うまで、一定の速さで走る。(対数らせん)

3 Dプリンタで、本に載っている作図道具を作ってみました。

2 円の伸開線

「伸開線の定義曲線に対して、その曲線に巻きつけられた糸をたるませないようにほどいていくときに糸の端点が描く軌跡のことを伸開線(Involute)と言う。伸開線の定義」



((<https://manabitimes.jp/math/2512> 参照 2023年4月7日))

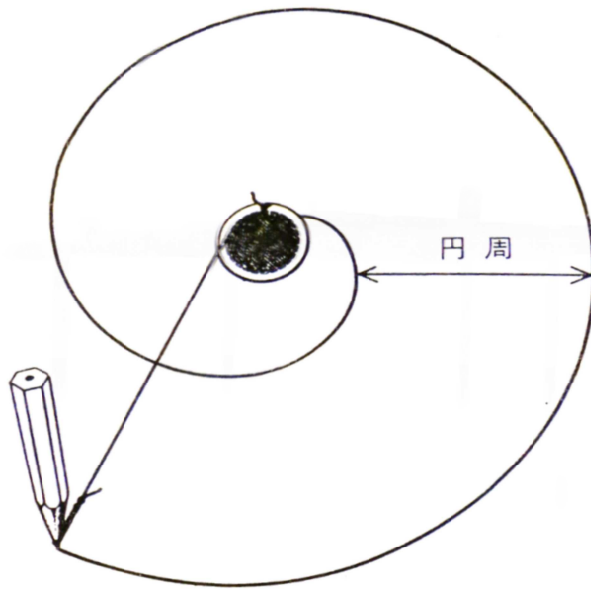


図48 円の伸開線の描き方。

「農家の子供が二人、丸太の上に厚板を置いて、即席にシーソーを作った。二人が上がったり下ったりしている時に、すべての点が描く曲線が円の伸開線になる。」

「糸を円の周囲に巻く。糸の固定させない方の端に輪を作り、鉛筆の先を入れて糸をほどいていくと、伸開線が描かれる。隣接したうずまき間の距離は一定で、円の一端に接する線に沿って測った場合、円周に等しくなる。円はらせんの”縮閉線”だということもできる。」

「縮閉線の定義

曲線に対して、曲率円の中心の軌跡を縮閉線(Evolute)と言う。」

定理

伸開線の縮閉線は元の曲線になる。

伸開線はスタート位置（糸の長さ）によって変わるので、曲線Cの伸開線は無数にあります。ですが、どの伸開線を選んでもその縮閉線はCに戻ります。たしかに、「糸の 端点」の「曲率中心」はもとの点になりそうですね。



3 アルキメデスのらせん

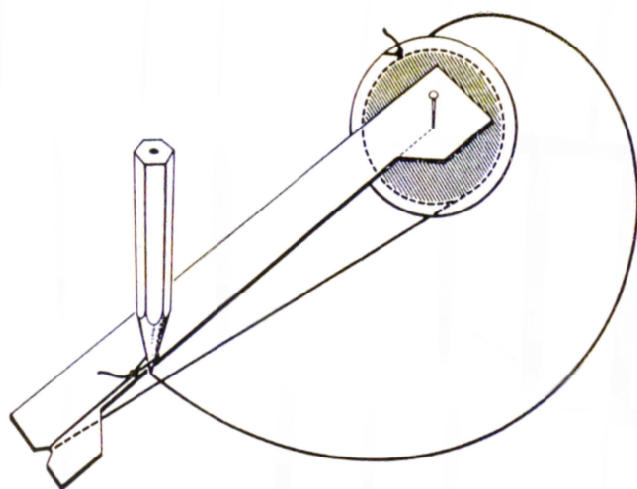


図49 アルキメデスのらせんを描く装置。

「回転木馬の上の男は、（地上に対して）アルキメデスのらせんとして知られる曲線を描く。レコードの溝は、このらせんの最もなじみ深い例である。」

「もっと正確なアルキメデスのらせんを得るには、図のような装置を使う。細長い棒が回転するにつれて、鉛筆の先は紙の縁に沿って外の方に引っ張られる。鉛筆は、細長い棒の回転速度に常に比例した速度で、縁に沿って動くことがすぐわかる。」

「最初の回転で得られたらせんは、円の伸開線と事実上見分けがつかない。しかし、二つの曲線は、厳密には決しておなじではない。アルキメデスのらせんの隣接するうずまき間の距離は一定ではあるが、その距離を測るには、円の一端に接する直線沿いに測るのではなくて、接する半径沿いに測らなければならない。われわれが最も普通に見ることのできるらせんは、アルキメデス型のものか、円一伸開線型のものである。堅く巻いたゼンマイ、巻いた毛布や紙の端、宝石のついた装飾らせんなどがそれであるが、こうした曲線には数学的な精度を持つものは滅多になく、与えられた例が実のところ伸開線とアルキメデスのらせんのどちらに近いかを定めるのは困難である。」

「一度正確なアルキメデスのらせんを描いてしまうと、コンパスと定規を使って、どんな角度をも三等分を含めて何等分することも可能になる。」

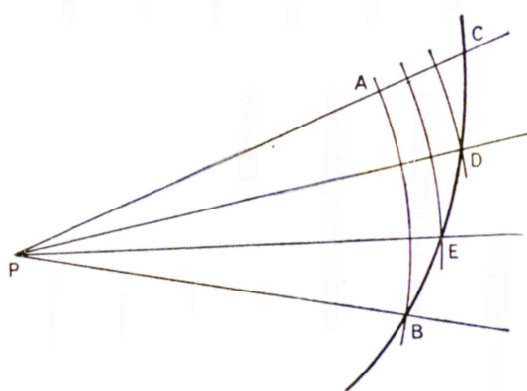


図50 アルキメデスのらせんを用いた角の三等分。

「角を三等分するには、その頂点とらせんの極点（原点）とを一致させ、その辺がらせんと交わるように置く。コンパスの先をPに置いて、弧ABを描く。線分ACを、通常の方法で三等分する。こうして決められたAC間の二点に、それを通る円弧を描き、らせん上にD点とE点とを印す。頂点からDとEに直線を引けば、頂角は完全に三等分される。」

4 対数らせん

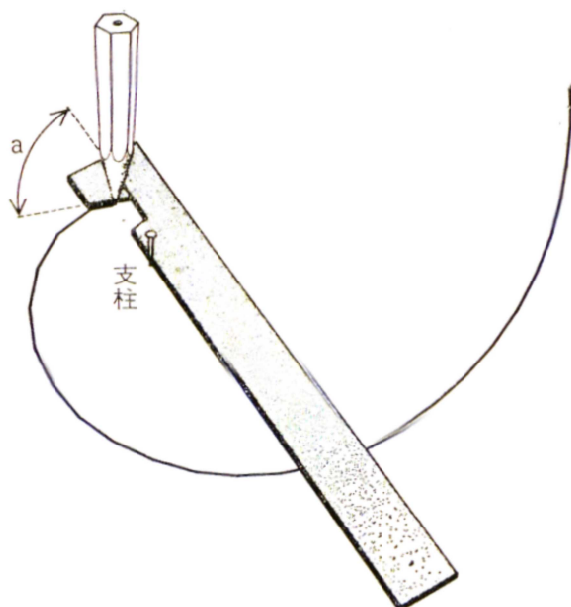


図52 対数らせんの描き方。

「正三角形の中心に達するまで、お互いに追いかけて合った犬たちは、対数らせん（等角らせん）の曲線上をたどることになる。このらせんの決め手の一つは、このらせんがすべての動径と同じ角度で接するということである。もし犬の代わりに数学的な点をとると、各点は有限の長さの道をたどるが（三角形の辺の2/3）、それには極点のまわりを無限回回らなければならない。」

「角 a は 0° から 180° までの間のどんな値でも自由に選べる。この装置は、すべての弦が同じ角度で動径と交わるということを、確実にしてくれる。もちろん、斜めの縁の長さをもっと短くすれば、らせんはそれだけ正確なものになる。」

「対数らせんは、自然界に見られる最も普通のらせんである。おうむ貝の殻やカタツムリの殻のうずまき、ひまわりやひな菊のような多くの植物の種の配列、松かさの鱗（うるこ）、などがそうである。」

「コガネグモ（普通の種類のクモ）は、中心点の周囲に、糸を対数らせん型のうずまきにして、クモの巣をつくる。」

「絶対的な大きさという点で、対数らせんが最も感動的に現れているのは、多くのらせん状の島宇宙の”腕”である。しかし、一体なぜ対数らせんがここにひょっこり出てくるのかは、腕自身の謎と密接な関係のある謎である。この腕は、星やガスが成長する道として知られているが、島宇宙の回転によって、らせん形にうずを巻いている。観測記録によると、これらの腕は銀河系の中心近くの方が端よりも速く回転している。すると、腕は急速に巻き上げられることになるが、大部分の島宇宙がらせん構造を保っているという事実は、腕が少しも巻き上げられていないということを暗示している。」